

Определение профиля скорости в круглой цилиндрической трубе при турбулентном режиме течения с использованием численных методов

А.А. Корневский
старший техник¹
patriotbmstu@yandex.ru

М.В. Рябинин
к.т.н., доцент²
ryabinin@bmstu.ru

¹ООО «ГРП Горизонт», Москва, Россия
²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Определение гидравлического сопротивления при неустановившемся режиме течения до сих пор вызывает затруднение при инженерных гидравлических расчетах даже в круглой цилиндрической трубе. Вопрос приобретает значимость при рассмотрении специальных прикладных задач, в частности, при гидроударе. К задачам такого рода следует отнести процесс гидроразрыва пласта для увеличения отдачи нефтеносной скважины. Для написания программ расчета, реализующих математические модели этого процесса, необходимо задаваться начальными условиями, отражающими не только взаимосвязь параметров течения, но и имеющими удобную для дальнейших расчетов форму представления. В статье изложен метод построения профиля скорости по сечению круглой трубы при установившемся режиме течения в удобной для использования в гидродинамических расчетах форме. Применено преобразование дифференциального уравнения профиля в дискретный аналог для расчетов с использованием неравномерной сетки дискретизации.

Введение

Целью данной работы является создание алгоритма для определения профиля распределения местных скоростей по сечению трубы при установившемся режиме течения в форме, удобной для дальнейших гидродинамических расчетов.

В статье изложен метод построения профиля скорости, с применением новой методики построения по пятислойной модели турбулентной вязкости [1]. Вычисленный таким путем профиль скорости предлагается в качестве начального при решении задач нестационарного течения.

В рамках работы, выполняемой в НУК Э МГТУ им. Н.Э.Баумана по теме Э 3.4-62сп, была поставлена задача предложить теоретически обоснованный способ построения профиля скорости в круглой цилиндрической трубе при турбулентном режиме течения. Решение этой задачи является одним из этапов создания программы расчета гидроудара по квазидвумерной модели, которая будет описана в следующих работах.

1. Вывод дифференциального уравнения профиля скорости

Уравнения Рейнольдса осредненного установившегося турбулентного движения жидкости [2], записанные для круглой цилиндрической трубы, используя гипотезу Буссинеска Ж.В. [3, 4] и приравнявая локальное ускорение к нулю, сведутся к виду:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial v_t}{\partial r} + \frac{\partial v_t}{\partial r} \right) \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + v_t \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial r^2} = 0 \quad (1)$$

где \bar{v}_z — осредненная компонента скорости, м/с;
 p — давление, Па;

ρ — плотность, кг/м³
 r — координата вдоль радиуса, м
 z — координата вдоль оси трубы, м
 $\vartheta_t = \vartheta + \varepsilon$ — полная кинематическая вязкость, м²/с
 $\varepsilon = \varepsilon(r)$ — вихревая вязкость, м²/с
 ϑ — кинематическая (сдвиговая) вязкость жидкости, м²/с

2. Модели вихревой вязкости

Для построения профиля стационарного течения турбулентного режима необходимо применить некую модель распределения вихревой ($\varepsilon(r)$) или полной ($\vartheta_t(r)$) кинематической вязкости.

На данный момент широко распространены две модели: трехслойная [5] и пятислойная [1]:

Трехслойная модель предполагает, что полная кинематическая вязкость равна кинематической вязкости жидкости в пределах ламинарного пограничного подслоя, и далее линейно возрастает в переходной области до значения вихревой вязкости в ядре потока. Кусочно-линейный закон изменения полной вязкости определяется соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_t &= \vartheta & 0 \leq y \leq y_5 \\ \vartheta_t &= \vartheta + (\vartheta_b - \vartheta) \frac{y - y_5}{y_{30} - y_5} & y_5 < y \leq y_{30} \\ \vartheta_t &= \vartheta_b & y_{30} < y \leq R \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\vartheta_b = (0.06 + 0.07)v^*R \quad y_{30} = \frac{5\vartheta}{v^*}$$

$$y_5 = \frac{30\vartheta}{v^*} \quad v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

где τ_w — касательное напряжение на стенке, Па
 y — расстояние отсчитываемое от стенки, м
 R — радиус трубы, м.

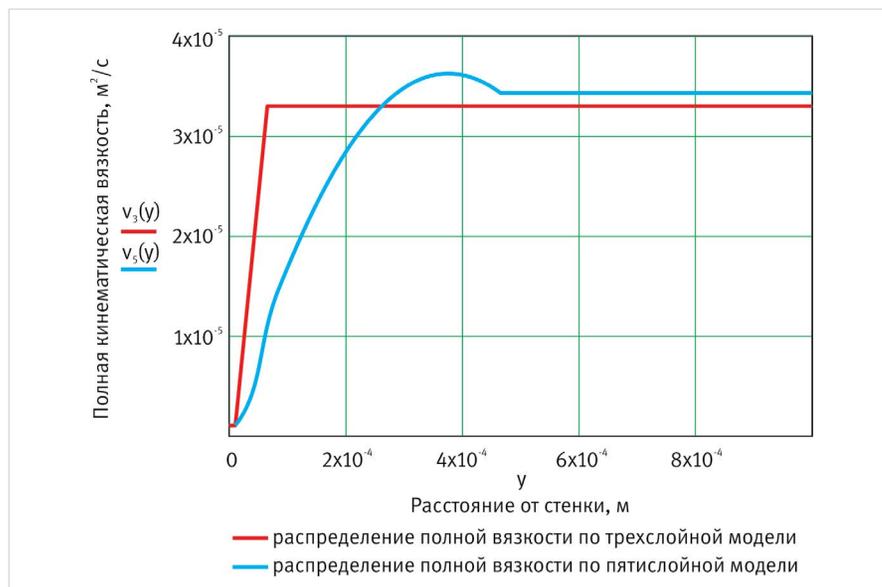


Рис. 1 — Модели распределения полной кинематической вязкости

Материалы и методы

Применена новая методика построения профиля скорости по пятислойной модели турбулентной вязкости по сечению потока. Указан оригинальный способ выбора параметров моделирования.

Ключевые слова

построение профиля скорости, математическая модель, численные методы, вихревая вязкость, турбулентное течение

Пятислойная модель распределения полной вихревой вязкости предполагает разбиение потока на пять слоев, при этом числовые значения полной вязкости на границе слоев совпадают. Соотношения выражающие значения вязкости в каждом слое приведены ниже:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_t &= \vartheta & 0 \leq y \leq \frac{1}{C_a} \frac{\vartheta}{v^*} \\ \vartheta_t &= v^* C_a y & \frac{1}{C_a} \frac{\vartheta}{v^*} < y \leq \frac{C_a}{C_b} \frac{\vartheta}{v^*} \\ \vartheta_t &= \frac{v^{*2}}{\vartheta} C_b y^2 & \frac{C_a}{C_b} \frac{\vartheta}{v^*} < y \leq \frac{k}{C_b + 4C_m R} \frac{\vartheta}{v^*} \\ \vartheta_t &= k v^* y \left(1 - \frac{ky}{4C_m R}\right) & \\ \frac{k}{C_b + 4C_m R} \frac{\vartheta}{v^*} < y &\leq \frac{2C_m}{k} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{C_c}{C_m}}\right) R & \\ \vartheta_t &= v^* C_c R & \frac{2C_m}{k} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{C_c}{C_m}}\right) R < y \leq R \end{aligned} \right\} (3)$$

где $v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$, $C_a = 0.19$, $C_b = 0.011$,
 $C_m = 0.077$, $C_c = 0.073$

$k=0.41$ — константа Кармана

ϑ — кинематическая вязкость, м²/с

τ_w — касательное напряжение на стенке, Па

y — расстояние отсчитываемое от стенки, м

R — радиус трубы, м.

Данная модель распределения полной вихревой вязкости применяется в данной статье. Распределение полной вязкости по двум указанным моделям показаны на рис. 1 (для параметров течения рассмотренного далее примера).

3. Дискретизация вычислительной области

Использование равномерной сетки (поскольку здесь задача сведена к одномерной, то под сеткой следует понимать отрезки, полученные путем разбиения непрерывной координаты) для численного решения такая сетка не является удачным выбором, т.к. около стенки наблюдается резкое изменение местной скорости, из-за чего возникает необходимость при шаге разбиения меньшей толщины пристенного слоя, создавать

значительное число точек разбиения. В целях экономии вычислительной мощности, необходимо применить неравномерную сетку, построенную на основе геометрической прогрессии.

Задаваемыми величинами являются: R — радиус, n — число точек разбиения, h_w — размер ячейки, прилегающей к стенке (меньше толщины пристенного слоя).

Знаменатель прогрессии определяется отношением размеров соседних ячеек, как показано на рис. 2:

$$K = \frac{r_i - r_{i-1}}{r_{i+1} - r_i} = \frac{\Delta r_w}{\Delta r_e} \quad (4)$$

Сумма геометрической прогрессии равна:

$$R = \frac{h_w(1 - K^{n-1})}{1 - K} \quad (5)$$

Для нахождения знаменателя прогрессии преобразуем уравнение (5) к виду:

$$n = \frac{\ln \left[1 + (K-1) \frac{R}{h_w} \right]}{\ln(K)} + 1 \quad (6)$$

Рассмотрим функцию $f(K)$, полученную из уравнения (6), тождественно равную нулю, если K — корень:

$$f(K) = \frac{\ln \left[1 + (K-1) \frac{R}{h_w} \right]}{\ln(K)} + 1 - n \quad (7)$$

$$f'(K) = \frac{\frac{R}{h_w} \ln(K)}{1 + (K-1) \frac{R}{h_w}} - \frac{\ln \left[1 + (K-1) \frac{R}{h_w} \right]}{K} \quad (8)$$

Используя метод Ньютона-Рафсона и задавая начальное приближение K_0 ($K_0 > 1$), вычисляем более точное значение K_1 [6]:

$$K_{i+1} = K_i - \frac{f(K_i)}{f'(K_i)} \quad i = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Далее методом последовательных приближений получим значение K .

$$|K_{(i+1)} - K_i| < \gamma$$

где γ — заданная допустимая погрешность.

4. Определение дискретного аналога уравнения

Будем считать, что скорость жидкости непрерывная функция вдоль радиуса r и выделим три точки w , e и p , как показано на рис. 3. Приведем уравнение (1) к дискретному аналогу, используя значения скорости в узловых точках, следующим образом (для каждой узловой точки) [7]:

$$a_p v_p = a_w v_w + a_e v_e + b \quad (10)$$

где v_p — значение скорости в узловой точке

p — полисе,

v_w и v_e — значение скорости в соседних узловых точках

a_w, a_e, a_p — коэффициенты дискретного аналога,

причем $a_w > 0$, $a_e > 0$ и $a_p = a_e + a_w$

$b > 0$ — свободный член.

Поскольку рассматриваемая функция непрерывна, то её можно разложить

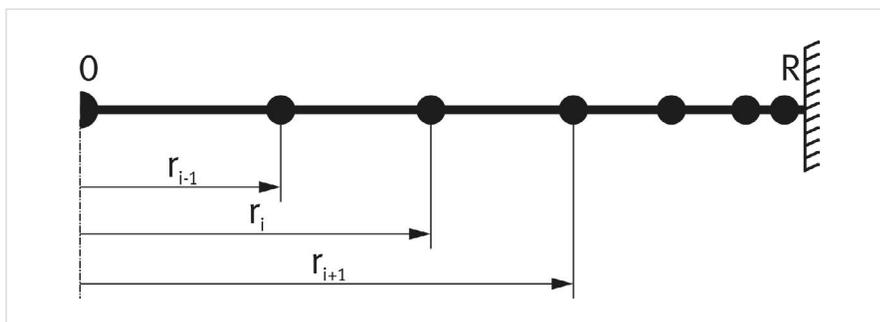


Рис. 2 — Пример вычислительной сетки

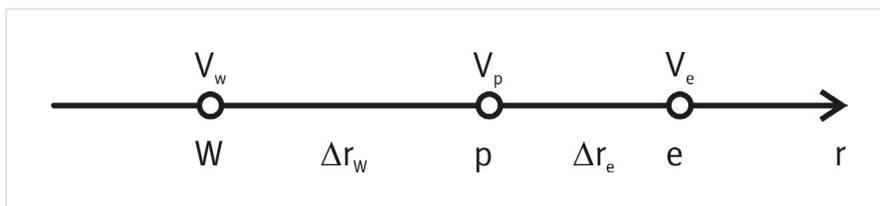


Рис. 3 — Дискретное представление функции скорости

в ряд Тейлора [8, 9]. В окрестности точки r , отбрасывая члены выше 2-го порядка, получим:

$$v_p = v_w - \Delta r_w \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_p + \Delta r_w^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right)_p + \dots \quad (11)$$

$$v_p = v_e + \Delta r_e \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_p + \Delta r_e^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right)_p + \dots \quad (12)$$

Для выражения первой и второй производных введем обозначение:

$$\beta = \frac{\Delta r_e}{\Delta r_w} = \frac{1}{K}$$

Умножив выражение (11) на β , и сложив с выражением (12), получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{2\beta[v_e - (1 + \beta)v_p + \beta v_w]}{(1 + \beta)\Delta r_e^2} \quad (13)$$

Далее, умножая выражение (11) на β^2 , и вычитая из него выражение (12), получим:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{v_e - \beta^2 v_w + (\beta^2 - 1)v_p}{(1 + \beta)\Delta r_e} \quad (14)$$

Теперь, зная выражение для производных, уравнение (1) приведено к виду уравнения (10):

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \left(\frac{\vartheta_t}{r} + \frac{\partial \vartheta_t}{\partial r} \right)_p \frac{v_e - \beta^2 v_w + (\beta^2 - 1)v_p}{(1 + \beta)\Delta r_e} + \vartheta_{t_p} \frac{2\beta[v_e - (1 + \beta)v_p + \beta v_w]}{(1 + \beta)\Delta r_e^2} = 0$$

После алгебраических преобразований получим:

$$\frac{2\vartheta_{t_p}\beta(\beta + 1) + \left(\frac{\vartheta_t}{r} + \frac{\partial \vartheta_t}{\partial r} \right)_p \Delta r_e(1 - \beta^2)}{(1 + \beta)\Delta r_e^2} v_p = \frac{2\vartheta_{t_p}\beta + \left(\frac{\vartheta_t}{r} + \frac{\partial \vartheta_t}{\partial r} \right)_p \Delta r_e}{(1 + \beta)\Delta r_e^2} v_e + \frac{\beta^2 \left(2\vartheta_{t_p} - \left(\frac{\vartheta_t}{r} + \frac{\partial \vartheta_t}{\partial r} \right)_p \Delta r_e \right)}{(1 + \beta)\Delta r_e^2} v_w + \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \quad (15)$$

Сравнивая выражение (15) с выражением (10), находим, что:

$$a_e = \frac{2\vartheta_{t_p}\beta + \left(\frac{\vartheta_t}{r} + \frac{\partial \vartheta_t}{\partial r} \right)_p \Delta r_e}{(1 + \beta)\Delta r_e^2} \quad (16)$$

$$a_w = \frac{\beta^2 \left(2\vartheta_{t_p} - \left(\frac{\vartheta_t}{r} + \frac{\partial \vartheta_t}{\partial r} \right)_p \Delta r_e \right)}{(1 + \beta)\Delta r_e^2} \quad (17)$$

$$a_p = a_e + a_w \quad (18)$$

$$b = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \quad (19)$$

Дискретный аналог уравнения (1) получен.

5. Начальные и граничные условия

Начальное распределение скорости.

$$v_i = v_{sr}, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (20)$$

Граничные условия.

$v_n = 0$ (21) — граничное условие на стенке трубы (условие прилипания жидкости).

Так как течение осесимметричное, то значение производной скорости по радиусу при стационарном потоке равно нулю. Из этого следует, что уравнение (1) может быть записано в виде:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \vartheta_{t_0} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial r^2} \right)_0 = 0 \quad (21)$$

Учитывая, что:

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial r^2} \right)_0 = \frac{2(v_1 - v_0)}{\Delta r_0^2} \quad (22)$$

Получим

$$v_0 = v_1 + \frac{\Delta r_0^2 \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right)}{2\vartheta_{t_0}} \quad (23)$$

где $v_0 = v_{max}$ — значение скорости в центре трубы.

Для начального приближения следует принять $v_0 = v_{sr}$, где v_{sr} — средняя скорость течения жидкости.

6. Решение системы алгебраических уравнений (дискретных аналогов)

Для решения данной системы алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящей из $n-2$ уравнений (10), граничных условий (21) и (23), воспользуемся методом Гаусса-Зейделя [10].

$$v_i^{k+1} = \frac{a_{e_i} v_{i+1}^k + a_{w_i} v_{i-1}^{k+1} + b}{a_{p_i}} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (24)$$

где k — индекс, обозначающий предыдущую итерацию (или начальное приближение).

Условие выхода из итераций:

$$\frac{v_i^{k+1} - v_i^k}{v_i^k} * 100\% < \zeta \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (25)$$

где $\zeta, \%$ — заданная допустимая погрешность.

После того как решение СЛАУ (24) найдено, следует воспользоваться условием (23), чтобы скорректировать значение v_0 , до выполнения условия:

$$\left| \frac{v_0^k - v_1^k - \frac{\Delta r_0^2 \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right)}{2\vartheta_{t_0}}}{\frac{\Delta r_0^2 \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right)}{2\vartheta_{t_0}}} \right| * 100\% < \alpha \quad (26)$$

где $\alpha, \%$ — заданная допустимая погрешность.

7. Оценка качества построенного профиля

Оценивая полученный результат, воспользуемся следующими соображениями:

1. Найденное численное решение, в первую очередь должно удовлетворять уравнению (1), с некоторой заданной погрешностью:

$$\left| \frac{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \left(\frac{\vartheta_t}{r} + \frac{\partial \vartheta_t}{\partial r} \right)_i \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \vartheta_{t_i} \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial r^2}}{\left(\frac{\vartheta_t}{r} + \frac{\partial \vartheta_t}{\partial r} \right)_i \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \vartheta_{t_i} \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial r^2}} \right| * 100\% < \sigma_1 \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

2. Значение производной скорости по радиусу на стенке трубы, вычисленное из полученного решения, должно соответствовать истинному значению с некоторой заданной погрешностью:

$$\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{v_n - v_{n-1}}{r_n - r_{n-1}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{v^*2}{\vartheta}$$

$$\left| \frac{\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R}}{\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R}} \right| * 100\% < \sigma_2$$

3. Должно соблюдаться соответствие средней скорости, вычисленной по полученному профилю скорости с заданной изначально, с некоторой заданной погрешностью:

$$v_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i + v_{i-1})(r_i^2 - r_{i-1}^2)}{2R^2} \quad \left| \frac{v_{sr} - u}{u} \right| * 100\% < \sigma_3$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \%$ — заданные допустимые погрешности.

8. Алгоритм вычисления профиля скорости

1. Задание начальных данных: u, v, R, L, ρ, n .
2. Расчет параметров течения: $v^*, \bar{p}/\partial z, h_w$.
3. Построение вычислительной сетки.
4. Вычисление распределения полной вязкости.
5. Вычисление коэффициентов дискретного аналога.
6. Проверка условия положительности коэффициентов дискретного аналога.
7. Задание начальных и граничных условий.
8. Решение полученной СЛАУ методом Гаусса-Зейделя.
9. Проверка условия (25), если необходимо, вернуться к п.8.
10. Проверка условия (26), если необходимо, вернуться к п.8.
11. Вычисление средней скорости и производной на стенке.
12. Вычисление погрешности в определении производной на стенке и средней скорости.

9. Пример расчета

Для реализации данного алгоритма, была написана программа на языке C++ в среде Microsoft Visual Studio 2005.

Начальные данные:

$$u=10 \text{ м/с}, \vartheta=1 \text{ с/м}, R=d/2=5 \text{ мм}, L=10 \text{ м}, \\ \rho=1000 \text{ кг/м}^3, n=150$$

Предварительный расчет:

$$Re = \frac{ud}{\vartheta} = 100000 \\ \lambda = \frac{1}{(1.8/g(Re)-1.5)^2} = 0.0177 \\ h = \lambda \frac{L}{d} \frac{u^2}{2g} = 90.61 \text{ м} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\rho gh}{L} = -88888.4 \text{ Па/м} \\ \tau_w = -\frac{\partial p d}{4} = 222.2 \text{ Па} \\ v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = 0.471 \text{ м/с} \\ h_w = \frac{1}{4} \frac{\vartheta}{v^*} = 0.53 \text{ мкм}$$

Далее вычисляем знаменатель прогрессии для построения расчетной сетки:

При $R=5 \text{ мм}$, $h_w=0.53 \text{ мкм}$, $n=150$ получим $K=1.0408$. Далее производится построение вычислительной сетки r_i .

После вычисления $v_r, v_r/r, \partial v_r/\partial r, a_{wr}, a_{\vartheta r}, a_{pr}$ и решения СЛАУ получим искомый профиль (таб. 1, рис. 4 и 5):

Сравним полученный профиль с широко известным степенным профилем:

$$\frac{v_{prov}(r)}{v^*} = C(m) \left(\frac{(R-r)v^*}{\vartheta} \right)^{1/m} \quad (27)$$

где $v_{prov}(r)$ – скорость в точке с координатой r , $m=m(Re)$, y – расстояние от стенки, при $Re=100000$, $m=7$, $C(m)=8.74$

Средняя скорость по полученному профилю [11]:

$$v_{sr} = \frac{\sum_{i=2}^z (v_i + v_{i-1})(r_i^2 - r_{i-1}^2)}{2R^2} = 9.978 \text{ м/с}$$

Относительная ошибка определения средней скорости:

$$O_{v_{sr}} = \frac{|v_{sr} - u|}{u} * 100\% = 0.22\%$$

Средняя скорость по степенному профилю:

$$v_{sr} = \frac{2 \int_0^R v_{prov}(y) y dy}{R^2} = 10.193 \text{ м/с}$$

Относительная ошибка определения средней скорости по степенному профилю:

$$O_{v_{sr}} = \frac{|v_{sr} - u|}{u} * 100\% = 1.93\%$$

Полученное значение производной скорости по радиусу при $r=R$:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R} = -223909 \text{ 1/с}$$

Истинное значение производной скорости по радиусу при $r=R$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{v^{*2}}{\vartheta} = -221841 \text{ 1/с}$$

№ узла	r, мм	v_{prov} , м/с	v, м/с	$\partial v/\partial r$, 1/с	$\partial^2 v/\partial r^2$, 1/(м*с)
1	0	12,481	11,904	0,00E+00	-1,57E+05
2	0,19638	12,413	11,894	-67,9988	-192480
3	0,38506	12,339	11,878	-110,027	-253007
4	0,56635	12,268	11,854	-156,714	-262039
5	0,74055	12,198	11,823	-202,628	-265126
6	0,90791	12,129	11,785	-247,121	-266559
7	1,06872	12,059	11,742	-290,05	-267346
8	1,22324	11,991	11,694	-331,395	-267828
9	1,37169	11,922	11,642	-371,18	-268144
10	1,51434	11,854	11,586	-409,445	-268365
...
20	2,66687	11,193	10,937	-695,625	-68378,2
...
30	3,43974	10,568	10,350	-868,395	-412506
...
40	3,95801	9,976	9,824	-1,21E+03	-1,02E+06
...
50	4,30555	9,414	9,323	-1,75E+03	-2,35E+06
...
60	4,5386	8,889	8,832	-2,58E+03	-5,38E+06
...
70	4,69488	8,374	8,343	-3,86E+03	-1,23E+07
...
80	4,79968	7,882	7,850	-5,83E+03	-2,87E+07
...
90	4,86995	7,414	7,347	-8,94E+03	-6,81E+07
...
100	4,91708	6,949	6,825	-1,40E+04	-1,68E+08
...
110	4,94868	6,489	6,154	-3,43E+04	-1,35E+09
...
120	4,96987	6,013	4,964	-8,24E+04	-2,75E+09
...
130	4,98408	5,489	3,378	-1,57E+05	-9,87E+09
...
140	4,99361	4,818	1,429	-2,24E+05	-4,41E+07
141	4,99437	4,732	1,265	-2,24E+05	-4,41E+07
142	4,9951	4,639	1,096	-2,24E+05	-4,41E+07
143	4,9958	4,538	0,939	-2,24E+05	-4,41E+07
144	4,99648	4,425	0,788	-2,24E+05	-4,41E+07
145	4,99712	4,326	0,644	-2,24E+05	-4,41E+07
146	4,99775	4,151	0,504	-2,24E+05	-4,41E+07
147	4,99834	3,974	0,370	-2,24E+05	-4,41E+07
148	4,99892	3,738	0,242	-2,24E+05	-4,41E+07
149	4,99947	3,376	0,118	-2,24E+05	-4,41E+07
150	5	0	0	-223909	-4,41E+07

Таб. 1 – Вычисленные значения, первой производной и второй производной скорости

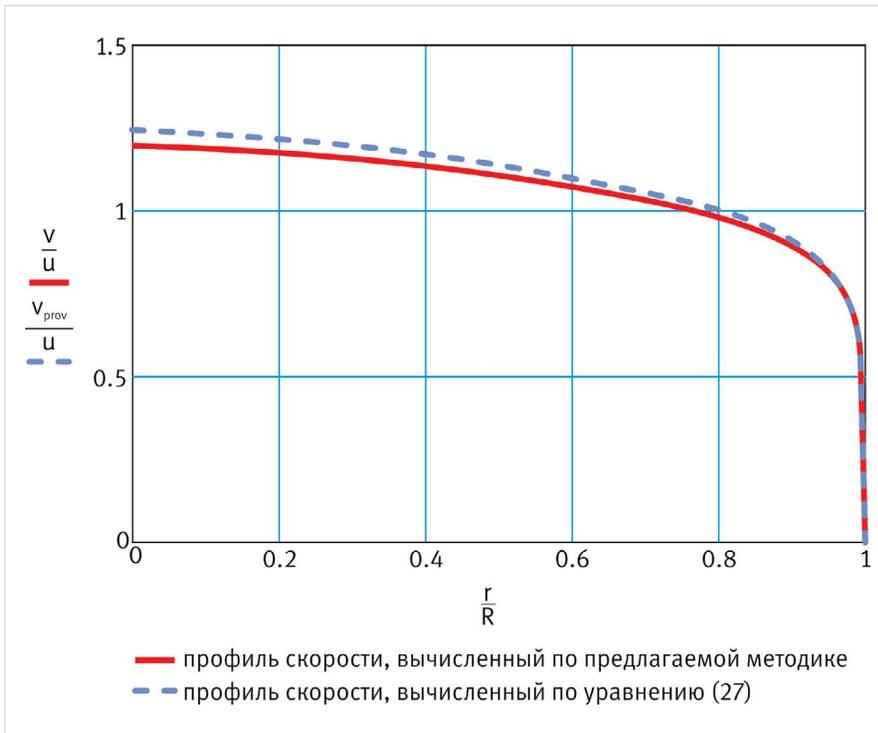


Рис. 4 – Полученный и степенной профили скорости

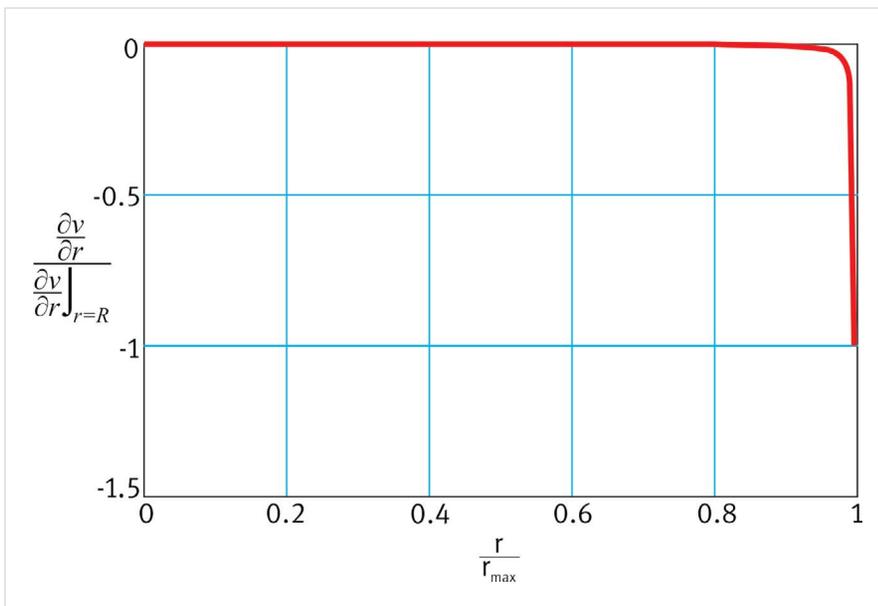


Рис. 5 – Полученный профиль производной скорости

Относительная ошибка определения средней скорости:

$$O_{\frac{\partial u}{\partial r}} \Big|_{r=R} = \left| \frac{\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R}}{\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R}} \right| * 100\% = 0.93\%$$

Значение производной скорости по радиусу при $r=R$ для степенного профиля:

$$\frac{\partial v_{prov}}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\infty 1/c$$

Относительная ошибка определения средней скорости:

$$O_{\frac{\partial u}{\partial r}} \Big|_{r=R} = \left| \frac{\frac{\partial v_{prov}}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R}}{\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R}} \right| * 100\% = \infty$$

Определение целесообразного выбора значений h_w и n

Определить минимально необходимое количество узлов (n) и целесообразное соотношение h_w и n можно из составленных функций относительных погрешностей для определения средней скорости и производной на стенке:

$$O_{v_{sr}} = O_{v_{sr}}(h_w, z)$$

$$O_{\frac{\partial u}{\partial r}} \Big|_{r=R} = O_{\frac{\partial u}{\partial r}} \Big|_{r=R}(h_w, z)$$

Данные функции представлены в таб. 2 и 3, а также на рис. 6 и 7:

За базовый размер принята величина $h_{w0} = v/v^*$

Как видно из таб. 2 и 3, для ошибки в 1% по определению производной и средней скорости достаточно, чтобы число точек разбиения было больше 150 и начальное расстояние от стенки было меньше принятого базового размера.

Итоги

Предлагается использовать полученный алгоритм построения профиля скорости для задания начальных условий при решении задач нестационарного течения. Приведен пример расчета, по результатам которого сделан анализ точности метода и предложен способ целесообразного выбора параметров численного расчета.

$o_{\frac{\partial u}{\partial r}} \Big|_{r=R}(h_w, z), \%$

$h_w \cdot z$	$1/10 \cdot (h_{w0})$	$1/8 \cdot (h_{w0})$	$1/6 \cdot (h_{w0})$	$1/4 \cdot (h_{w0})$	$1/2 \cdot (h_{w0})$	h_{w0}	$3/2 \cdot (h_{w0})$	$2h_{w0}$
30	203	39	36	32,6	198	23	200	22
50	11	10	9,73	8,77	7,64	7,36	8,12	8,62
70	4,96	4,83	4,54	4,03	3,65	3,99	4,67	5,72
90	2,75	2,62	2,46	2,29	1,95	2,6	3,37	4,37
110	1,74	1,65	1,56	1,44	1,48	1,95	2,72	3,74
130	1,19	1,12	1,05	1,04	1,10	1,63	2,37	3,38
150	0,85	0,81	0,78	0,93	0,86	1,41	2,11	3,14
170	0,64	0,62	0,59	0,59	0,69	1,24	1,94	2,96

Таб. 2 – Ошибка определения производной скорости на стенке

Выводы

Предложенная методика построения профиля скорости показывает высокую точность (для решения прикладных инженерных задач), тем самым доказывая свою целесообразность для использования на практике. Стоит также отметить, что получаемый профиль скорости превосходит по качеству все известные на сегодняшний день аналитические зависимости. Главным достоинством данного алгоритма является его универсальность, программируемость и сравнительно небольшое потребление вычислительной мощности ЭВМ.

Список литературы

1. Rufelt A. Numerical Studies of unsteady friction in transient pipe flow. Stockholm: Master of Science Thesis, 2010. 77 p.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: учебник для вузов. 7-е изд. М.: Дрофа, 2003. 610 с.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 521 с.
4. Попов Д.Н., Панаиотти С.С., Рябинин М.В. Гидромеханика: Учебное пособие. 3-е изд. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 254 с.
5. Попов Д.Н., Нестационарные гидромеханические процессы. М.: Машиностроение, 1982. 240 с.
6. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоиздат, 1984. 152 с.
7. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и в задачах. 3-е изд., стереотипное. М.: Высшая школа, 2008. 480 с.
8. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н., Лекции по математическому анализу. 6-е изд., стереотипное. М.: Дрофа, 2008. 640 с.
9. Шейпак А.А. Гидравлика и гидропневмопривод: учебник. Ч.1: Основы механики жидкости и газа. 6-е изд., стереотипное, М.: МГИУ, 2007. 264 с.
10. Балдин К.В., Башлыков В.Н., Рукосуев А.В. Высшая математика: учебник. М.: Флинта, 2010. 360 с.
11. Калиткин Н.Н. Численные методы: учебное пособие. 2-е изд. СПб.: БХВ – Петербург, 2011. 592 с.

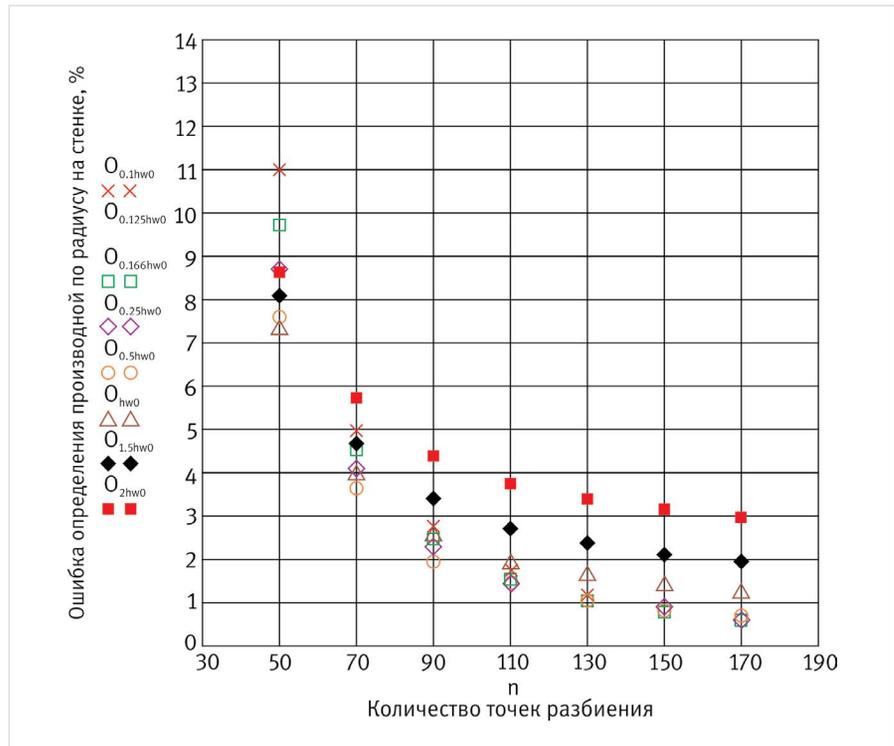


Рис. 6 – График изменения ошибки определения производной скорости на стенке в зависимости от количества точек разбиения

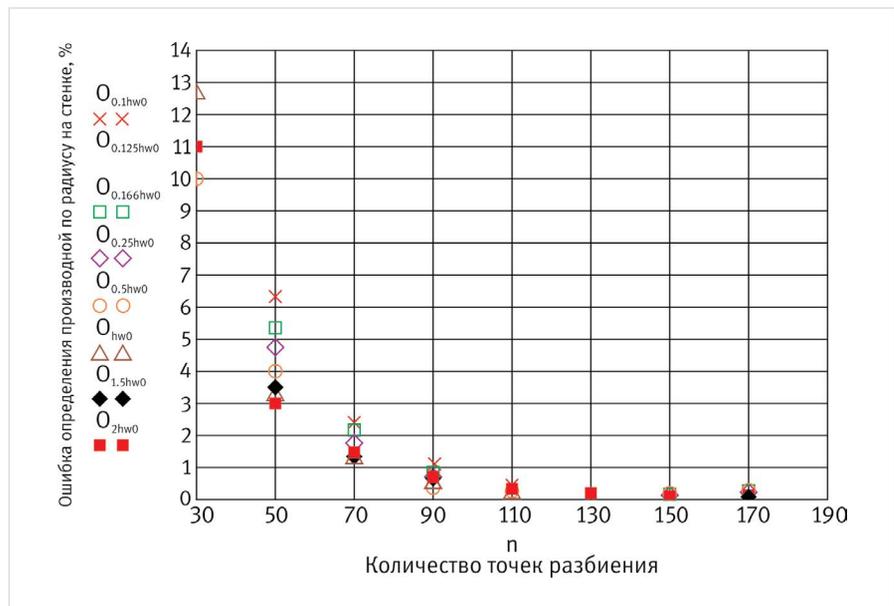


Рис. 7 – График изменения ошибки определения средней скорости в зависимости от количества точек разбиения

$$\sigma_{vsr} = \sigma_{vsr}(h_w, z), \%$$

h_w, z	$1/10 \cdot (h_w)$	$1/8 \cdot (h_w)$	$1/6 \cdot (h_w)$	$1/4 \cdot (h_w)$	$1/2 \cdot (h_w)$	h_w	$3/2 \cdot (h_w)$	$2h_w$
30	23	24	21,5	19,22	9,98	12,70	3,79	11
50	6,30	5,92	5,38	4,81	3,94	3,35	3,41	2,98
70	2,47	2,40	2,18	1,82	1,44	1,30	1,36	1,46
90	1,07	0,88	0,87	0,77	0,43	0,52	0,60	0,66
110	0,45	0,37	0,30	0,22	0,12	0,19	0,24	0,34
130	0,10	0,04	0,00	0,03	0,07	0,02	0,08	0,18
150	0,12	0,14	0,18	0,22	0,21	0,08	0,09	0,09
170	0,25	0,27	0,29	0,31	0,33	0,16	0,19	0,02

Таб. 3 – Ошибка определения средней скорости

Апрельский выпуск



Definition of velocity profile for turbulent flow in a circular cylindrical pipe by means of numerical methods

UDC 621.643+004.02

Authors:

Artem A. Korenevsky — senior technician¹; patriotbmstu@yandex.ruMichael V. Ryabinin — Ph.D., associate professor²; ryabinin@bmstu.ru¹GRP Gorizont, Moscow, Russian Federation²Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

Determination of flow resistance at unsteady flow condition is still a problem for engineering hydraulic calculations even in a circular pipe. The issue becomes important when considering special practical problems, in particular, hydraulic impact. Such problems include hydraulic fracturing aimed at stimulating oil well productivity. To create calculation programs implementing the mathematical models of this process it is necessary to set the initial conditions not only reflecting the relationship of flow parameters, but also having a convenient representation for further calculations. The article describes a method of the velocity profile construction over the cross section of a circular pipe at steady flow conditions in a form convenient to use in the hydrodynamic calculations. Transformation of the profile differential equation into a discrete analogue for calculations using the non-uniform discretization grid was applied.

Materials and methods

A new method of the velocity profile construction for the five-layer model of turbulent viscosity distribution over the flow cross-section was applied. An original method

of selecting simulation parameters was proposed.

Results

It is proposed to use the developed algorithm of the velocity profile construction to set the initial conditions for solving the unsteady flow problems. An example of the calculation, the results of which was used to analyze the accuracy of the method, is provided; and a technique for the rational selection of numerical calculation parameters is proposed.

Conclusions

The proposed method of the velocity profile construction showed high accuracy of the results (for solving practical engineering problems), thereby proving its suitability for practical use. It is should be noted that the constructed velocity profile is of higher quality than all the currently known analytic dependences. The main advantages of this algorithm are its flexibility, programmability and comparatively small ECM computational power demand.

Keywords

velocity profile construction, mathematical model, numerical methods, turbulent viscosity, turbulent flow

References

1. Rufelt A. Numerical Studies of unsteady friction in transient pipe flow. Stockholm: Master of Science Thesis, 2010. 77 p.
2. Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquid and gas]. Textbook, 7-th ed. Moscow: Drofa, 2003, 610 p.
3. Shlikhting G. *Teoriya pogrannichnoy sloya* [Theory of boundary layer]. Moscow: Nauka, 1974, 521 p.
4. Popov D.N., Panaiotti S.S., Ryabinin M.V. *Gidromekhanika* [Hydromechanics]. Textbook, 3-d ed. Moscow: Bauman Moscow State Technical University, 2014, 254 p.
5. Popov D.N., *Nestatsionarnyye gidromekhanicheskie protsessy* [Non-stationary hydromechanical processes]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1982, 240 p.
6. Patankar S. *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti* [Numerical methods for solving problems of heat transfer and fluid dynamics]. Moscow: Energoizdat, 1984, 152 p.
7. Kireev V.I., Pantelev A.V. *Chislennyye metody v primerakh i v zadachakh* [Numerical methods in the examples and problems]. 3-d ed. Moscow: Vysshaya shkola, 2008, 480 p.
8. Arkhipov G.I., Sadovnichiy V.A., Chubarikov V.N., *Lektsii po matematicheskoy analizu* [Lectures on mathematical analysis]. 6-th ed. Moscow: Drofa, 2008, 640 p.
9. Sheypak A.A. *Gidravlika i gidropnevmoпривод: uchebnyk. Ch.1: Osnovy mekhaniki zhidkosti i gaza* [Hydraulics and hydropneumatic drive: a textbook. Part 1: The basics of gas and fluid mechanics]. 6-th ed. Moscow: MGU, 2007, 264 p.
10. Baldin K.V., Bashlykov V.N., Rukosuev A.V. *Vysshaya matematika* [Advanced math]. Textbook. Moscow: Flinta, 2010, 360 p.
11. Kalitkin N.N. *Chislennyye metody* [Numerical methods] Textbook. 2-d ed. St-Petersburg: BKhV-Peterburg, 2011, 592 p.